Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Blatt 5

- Abgabe bis **Donnerstag 29.11.2018 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

Definition (Erinnerung) Sei Ω eine nicht-leere, endliche Menge. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \subset \Omega,$$

wo $p(\omega) \in [0,1]$ die Bedingung $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ erfüllt. In diesem Fall heißt $(\Omega, \mathbb{P})$ endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 1. (2 Punkte)
Sei Ω eine nicht-leere, endliche Menge. Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω. Für $\lambda \in (0,1)$ definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\lambda$ durch

$$\mathbb{P}^\lambda(A) = \lambda \mathbb{P}_1(A) + (1-\lambda)\mathbb{P}_2(A), \qquad A \subset \Omega.$$

Sei X eine Zufallsvariable auf Ω. Beweisen Sie

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\lambda}(X) = \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X).$$

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\varphi : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi) > 0$. Definiere

$$\mathbb{P}^\varphi(A) = \sum_{\omega \in A} p^\varphi(\omega), \quad p^\varphi(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi)} p(\omega), \qquad A \subset \Omega.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{P}^\varphi$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

(b) $\mathbb{P}^\varphi$ ist absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$.

(c) Falls $\varphi(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist auch $\mathbb{P}$ absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}^\varphi$.

(d) Ist X eine Zufallsvariable auf Ω, so gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\varphi}(X) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\varphi)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi)}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Betrachte einen Finanzmarkt im EPM mit nur einem Asset. Der Zinsatz sei $r > -1$, die Anfangspreise seien $\pi_0, \pi_1 > 0$, die Endpreise seien gegeben durch

$$S_0 = (1+r)\pi_0, \qquad S_1(\omega) = \begin{cases} a_+\pi_1, & \omega = +1 \\ \pi_1, & \omega = 0 \\ \frac{1}{2}\pi_1, & \omega = -1 \end{cases},$$

wo $a_+ \geq 1$ und $\Omega = \{-1, 0, +1\}$ mit $\mathbb{P}$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4} + 2\rho, \quad \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{4} - \rho, \quad \mathbb{P}(\{+1\}) = \frac{1}{2} - \rho, \quad 0 \leq \rho < \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Zeigen Sie das $\mathbb{P}$ gegeben durch (1) genau dann ein risikoneutrales Maß ist, wenn gilt

$$\frac{3+2a_+}{8} < 1 + r \leq \frac{3+4a_+}{8}.$$

Wie muss ρ gewählt werden damit (1) ein risikoneutrales Maß definiert?

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Betrachte einen Finanzmarkt im EPM mit zwei Assets. Der Zinssatz sei $r > -1$ die Anfangspreise seien $\pi_0, \pi_1, \pi_2 > 0$, die Endpreise seien gegeben durch

$$S_0 = (1+r)\pi_0, \quad S_1(\omega) = \begin{cases} a_+\pi_1, & \omega = +1 \\ a_-\pi_1, & \omega = -1 \end{cases}, \quad S_2(\omega) = \begin{cases} a_-\pi_2, & \omega = +1 \\ a_+\pi_2, & \omega = -1 \end{cases},$$

wo $0 < a_- \leq 1 \leq a_+$ und $\Omega = \{+1, -1\}$ mit $\mathbb{P}$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{+1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{-1\}) = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt genau dann ein eindeutiges risikoneutrales Maß , wenn $1 + r = \frac{a_+ + a_-}{2}$. Bestimmen Sie in diesem Fall das risikoneutrale Maß.

(b) Sei X die Auszahlungsfunktion zu einem europäischen Call mit Strike $K_1 > 0$ und underlying S_1. Bestimmen Sie für das eindeutige risikoneutrale Maß $\mathbb{Q}$ den Wert $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{X}{1+r}\right)$.

(c) Bestimmen Sie die Rendite R_1 sowie R_2 in Abhängigkeit von $\omega \in \Omega$.